MODÜLER ARİTMETİK

* Tekrarlı sistemlerde son varılacak noktayı bulmak için kullanılır.

$\boxed{y = a*x + b}$ (x'in a defa kullanılması ve kalan b'nin değerine ulaşılması.)

* $a, m, n, k \in Z, m > 1$ olmak üzere; a'nın m'ye bölümünden elde edilen kalan k ise mod m'de a'nın dengi k'dir ve $\boxed{a \equiv k \pmod m}$ biçiminde gösterilir.

$$\begin{array}{r|l} a & m \\ \hline -\ \ & n \\ k & \end{array} \qquad a = m * n + k \qquad \boxed{a \equiv k \pmod m}$$

* a ve b sayıları m sayısına bölündüğünde kalanlar eşit olursa (a=m*x+k, b=m*y+k);

$\boxed{a \equiv b \pmod m}$

* $a \equiv k \pmod m \Rightarrow \boxed{a - k \equiv 0 \pmod m} \parallel \boxed{a - k = m * x}$

* $\boxed{a \equiv b \pmod m}$ ve $\boxed{x \equiv y \pmod m}$ olmak üzere;

- $\boxed{a + x \equiv b + y \pmod m}$
- $\boxed{a - x \equiv b - y \pmod m}$
- $\boxed{a * x \equiv b * y \pmod m}$
- $n \in Z^+ \Rightarrow \boxed{a^n \equiv b^n \pmod m}$
- $k \in Z \Rightarrow \boxed{a * k \equiv b * k \pmod m}$

* Bir sayının birler basamağındaki rakam (mod 10) ile bulunur. Birler basamağındaki rakam 0, 1, 5, 6 olan sayının kaçıncı kuvveti alınırsa alınsın aynı olur. Diğerlerinde kaçıncı derecesi ilk rakamı veriyorsa o derecedekiler sağlar.

* Haftanın günlerinde Mod 7 ile çalışılır.

* Yılın aylarında Mod 12 ile çalışılır.

Örnek: *1273 sayısının mod 7'deki karşılığı nedir?*

$1273 = 7 * 181 + 6 \Rightarrow 1273 \equiv 6 \pmod 7$

Örnek: $x \equiv 6 \pmod 9$ *denkliğini sağlayan x değeri?*

$x - 6 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow x - 6 = 9 * k \quad (k \in Z)$

$k = 1 \Rightarrow x - 6 = 9 * k \Rightarrow x = 15$

Burada k değerine değerler atayarak x değerleri bulunur.

Örnek: $18 \equiv 0 \pmod m$ *denkliğini sağlayan farklı m değerlerinin toplamı?*

18'i tam bölen m sayısı (m>1) olduğuna göre; 18'in tam katmanları olacak şekilde m değerleri: 2, 3, 6, 9, 18.

m=2+3+6+9+18= 38//

Örnek: 7^{14} *sayısının 5 ile bölümünden kalan nedir?*

$$\left.\begin{array}{l} 7^1 \equiv 2 \pmod 5 \\ 7^2 \equiv 4 \pmod 5 \\ 7^3 \equiv 3 \pmod 5 \\ 7^4 \equiv 1 \pmod 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 7 = 5*1+\underline{2} \\ 2^2 = 4 = 5*0+\underline{4} \\ 2*4 = 8 = 5*1+\underline{3} \\ 2*3 = 6 = 5*1+\underline{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (7^4)^3 * 7^2 \\ = 1^3 * 4 \\ = 4 // \end{array}$$

Örnek: 2008^{2008} *sayısının 10 ile bölümünden kalan nedir?*

$$\left.\begin{array}{l} 2008^1 \equiv 8 \pmod{10} \\ 2008^2 \equiv 4 \pmod{10} \\ 2008^3 \equiv 2 \pmod{10} \\ 2008^4 \equiv 6 \pmod{10} \\ 2008^5 \equiv 8 \pmod{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2008 = 10 * 200 + 8 \\ 8^2 = 64 = 10 * 6 + 4 \\ 8 * 4 = 32 = 10 * 3 + 2 \\ 8 * 2 = 16 = 10 * 1 + 6 \\ 8 * 6 = 48 = 10 * 4 + 8 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (2008^4)^{502} = (8^4)^{502} = 8^4 = 6$

Burada 8^4 *sayısından sonra kalan tekrar başa dönmüştür. Bu sayının üssü ne kadar artsa da sonuç 6 çıkacak.*

Örnek: $3^{25} + 5^{48}$ *toplamının birler basamağı nedir?*

$3^{25} + 5^{48} \equiv x + y \pmod{10}$

$3^{25} \equiv x \pmod{10} \qquad 5^{48} \equiv y \pmod{10}$

$$\left.\begin{array}{l} 3^1 \equiv 3 \pmod{10} \\ 3^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ 3^3 \equiv 7 \pmod{10} \\ 3^4 \equiv 1 \pmod{10} \end{array}\right\} \Rightarrow (3^4)^6 * 3^1 \Rightarrow x = 3 //$$

$$\left.\begin{array}{l} 5^1 \equiv 5 \pmod{10} \\ 5^2 \equiv 5 \pmod{10} \end{array}\right\} \Rightarrow (5^1)^{48} \Rightarrow y = 5 //$$

$\Rightarrow x + y = 3 + 5 = 8 //$ *(Birler basamağı)*

Örnek: *Bugün günlerden cumartesi olursa 424 gün sonra ve 352 gün önceki günler hangileridir?*

** 424 gün sonraki gün:*

$424 \equiv x \pmod 7 \Rightarrow 424 = 7 * 60 + 4 \Rightarrow 424 \equiv 4 \pmod 7$

Bugün 0. gün sayılarak 4 gün sonraya gidilirse:

Cumartesi	*Pazar*	*Pazartesi*	*Salı*	*Çarşamba*
0	*1*	*2*	*3*	***4***

424 gün sonraki gün = Çarşamba

** 352 gün önceki gün:*

$352 \equiv x \pmod 7 \Rightarrow 352 = 7 * 50 + 2 \Rightarrow 352 \equiv 2 \pmod 7$

Bugün 0. gün sayılarak 2 gün önceye gidilirse:

Perşembe	*Cuma*	*Cumartesi*
-2	*-1*	*0*

352 gün önceki gün = Perşembe

Örnek: *Pazartesi 1. gün alınırsa 500. gün hangi gün olur?*

1. gün Pazartesi ise 500. gün için 499 gün sonrasına bakılır.

$499 \equiv x \pmod 7 \Rightarrow 499 = 7 * 71 + 2 \Rightarrow 499 \equiv 2 \pmod 7$

Pazartesi	*Salı*	*Çarşamba*
0	*1*	***2***

500. gün olan Çarşamba idir.

Örnek: *Bir asker 4 günde bir nöbet tutar. İlk nöbetini Perşembe tutarsa, 19. nöbetini hangi gün tutar?*

*19. nöbette ilk günü Perşembe tutarsa kalan 18 gün içinde 4 günde bir tutma olasılığı olursa 18*4= 72 gün sonra tutar.*

$72 \equiv x \pmod 7 \Rightarrow 72 = 7 * 10 + 2 \Rightarrow 70 \equiv 2 \pmod 7$

Perşembe	*Cuma*	*Cumartesi*
0	*1*	***2***

19. nöbetini Cumartesi tutar.

Örnek: *Bir hasta 3 ayda bir kontrole gider. 8. kontrolüne Ocak ayında giderse ilk kontrolüne hangi ay gider?*

*8. kontrole Ocak ayında giderse 7 kontrol önceki olan ve her kontrol arası 3 ay olursa 7*3= 21 ay öncesi ilk kontrolü.*

$21 \equiv x \pmod{12} \Rightarrow 21 = 12*1+9 \Rightarrow 21 \equiv 9 \pmod{12}$

Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık	Ocak
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

9 ay önceki gün olan ilk kontrol "Nisan" ayındadır.

Örnek: *Bir hemşire 5 günde bir, doktor ise 8 günde bir nöbet tutar. İkisi beraber ilk nöbeti Salı tutarsa 10. nöbetini birlikte ne zaman tutar?*

$\text{OKEK}(5,8) = 40$ *gün (İkisi birlikte ilk nöbet tutarlarsa)*

*10. nöbeti Salı tutarsa, 9 nöbet için 40 günde bir şeklinde birlikte nöbet tutarlarsa; 9*40= 360 gün sonra tutar.*

$360 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 360 = 7*51+3 \Rightarrow 360 \equiv 3 \pmod{7}$

Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
0	1	2	**3**

10. nöbetlerini Cuma birlikte tutar.

Örnek: *DENİZDENİZDENİZ... şeklinde oluşturulan harf dizisine bakıldığında baştan 48. harf nedir?*

DENİZ şeklinde periyodik giden seri 5'er serilerdendir.

$48 = 5*9+3 \Rightarrow 48 \equiv 3 \pmod{5}$

Z	D	E	N	İ	Z	D
0	1	**2**	**3**			

48. harf "N" dir.