PERMÜTASYON – KOMBİNASYON

Saymanın Temel Kuralları

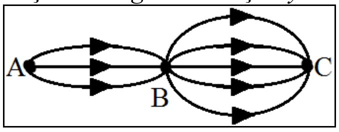
* $s(A)=a$ ve $s(B)=b$; A ve B sonlu ve ayrık iki küme;

- $s(A\cup B)=s(A)+s(B)=a+b$ (Toplama kuralı)
- $s(A\cup B)=s(A)*s(B)=a*b$ (Çarpma kuralı)

* Ayrık olan iki işlemden biri a farklı yolla, diğeri ise b farklı yolla yapılabiliyorsa bu işlemler;

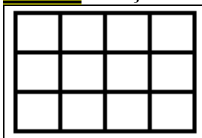
- "**Veya / Ya da**" bağlacı varsa $\Rightarrow$ " **a + b**"
- "**Ve**" bağlacı varsa $\Rightarrow$ " **a * b**"

Örnek: *A şehrinden B şehrine 3 farklı yol, B şehrinden C şehrine 5 farklı yol vardır. A şehrinden C şehrine gidecek olan biri B şehrine uğramak koşuluyla kaç farklı yoldan gider?*



*A'dan B'ye 3 farklı yol; B'den C'ye 5 farklı yol olduğuna göre ikisi de aynı anda istendiğine (ve) göre 3*5=15 farklı yol.*

Örnek: *12 eş kareden oluşan şekilde kaç kare olabilir?*



1x1 'lik kareler: 12 tane
2x2 'lik kareler: 6 tane
3x3 'lik kareler: 2 tane
Toplam kare : 20 tane

Örnek: $A=\{1,2,3,4,5\}$ *kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 300'den büyüktür?*

abc sayısının 300'den büyük olması için a=3,4,5 olmalı.

3	4	3
a	b	c
3,4,5		

Yüzler basamağı 3,4,5 gelebilir, 3 farklı sayı gelir. Yüzler basamağında bir sayı kullanıldığından kalan dört sayıdan herhangi biri gelir. (farklı istendiğinden) Yüzler ve onlar basamağında iki sayı kullanıldığından kalan üç sayı arasından herhangi biri kullanılır.

*3 * 4 * 3 = 36 sayı vardır.*

Örnek: $A=\{0,1,2,3\}$ *kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabilir?*

abc sayısının a≠0 olmalı (Üç basamaklı olması için)

Çift doğal sayı istendiğinden c=0 veya 2 alabilir. c=2 iken a≠0 olmadan ve 0'ı da b'de katacak şekilde hesaplanmalıdır.

3	2	1	
a	b	c	c=0 için 3*2*1 = 6 tane
1	2,3	0	
2	1,3		
3	1,2		

2	2	1	
a	b	c	c=2 için 2*2*1 = 4 tane
1	0,3	2	
3	1,3		

6 + 4 = 10 tane

Permütasyon:

* Permütasyon; sıralama (diziliş) demektir. Seçilmiş olan nesnelerin sıralanışı veya dizilişi söz konusudur.

* n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonu:

$$\boxed{P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\underbrace{n*(n-1)*...*(n-r+1)}_{r\ \text{tane}\ \text{carpan}}}$$

* n tane nesne hiç koşulsuz ve yan yana **n!** sayıda diziliş (sıralama) gerçekleştirir.

$$\boxed{P(n,n)=n!}$$

Örnek:

- $P(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7*6*5*4!}{4!}=7*6*5=210$
- $P(n,2)=30\Rightarrow n*(n-1)=30\Rightarrow n=6$

Örnek: *8 kişinin katıldığı satranç turnuvasında, yarışmacılara verilecek olan ilk üç derece kaç farklı şekilde?*

$P(4,4)=4!=4*3*2*1=24$

Örnek: *Birbirinden farklı 3 fizik, 4 kimya ve 5 matematik kitabı boş bir rafa yan yana dizilecektir.*

- *Bu kitaplar kaç farklı biçimde sıralanabilir?*

Toplam = 3 + 4 + 5 = 12 kitap var.

$\boxed{P(12,12)=12!}$ *(Kendi sayısı kadar dizilimi olur.)*

- *Aynı dersin kitapları yan yana durmak koşuluyla bu kitaplar boş bir rafa kaç farklı şekilde sıralanabilir?*

3 Fizik kitabı kendi arasında $\boxed{P(3,3)=3!}$

4 Kimya kitabı kendi arasında $\boxed{P(4,4)=4!}$

5 Matematik kitabı kendi arasında $\boxed{P(5,5)=5!}$

Her ders kitapları yan yana olacağından dersleri tek kitap olarak sayarsak F:1, K:1, M:1 gibi kendi aralarında dizilmeleri $\boxed{P(3,3)=3!}$

Kitaplar: $\boxed{P(3,3)*P(4,4)*P(5,5)*P(3,3)=3!*4!*5!*3!}$

Tekrarlı Permütasyon:

* Sıralanmış n tane elemandan; farklı a, b ve c türlerinden olan n elemanın yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan farklı sıralamaların sayısı:

$$n=a+b+c\Rightarrow\boxed{\binom{n}{a,b,c}=\frac{n!}{a!*b!*c!}}$$

Örnek: *1100222 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılır?*

1 rakamı = 2 tane; 0 rakamı= 2 tane; 2 rakamı= 3 tane.

$\binom{7}{2,2,3}=\frac{7!}{2!*2!*3!}=210$ *(Tüm ihtimal)*

Sıfırın başa gelmeme ihtimali (7 basamaklıda iki sıfırın olmadığı durumlar):

$210*\frac{7-2}{7}=150$ *(İstenen durum)*

Örnek: *BELLEK sözcüğündeki harflerin yeri değişerek yazılabilecek anlamlı – anlamsız 6 harfli kaç sözcük var?*

B:1, E:2, L:2, K:1; Toplam 6 harf (n)

$\binom{6}{1,2,2,1}=\frac{6!}{1!*2!*2!*1!}=180$ *sözcük var.*

Dönel (Dairesel) Permütasyon:

* Basit kapalı bir eğri üzerinde (etrafında), n tane elemanın sıralanmasıdır. n tane elemanın dönel sıralaması: $\boxed{(n-1)!}$

Örnek: *3 avukat, 4 öğretmen yuvarlak masa etrafında oturacaktır.*

- *Kaç farklı şekilde otururlar?*
  Toplam = 3 + 4 = 7 kişi
  (n-1)! = (7-1)! = 6! sayıda masada oturabilirler.
- *Aynı meslek grubuna ait kişiler yan yana oturmak koşuluyla, kaç farklı şekilde oturabilirler?*
  3 avukat kendi arasında $\boxed{P(3,3)=3!}$
  4 öğretmen kendi arasında $\boxed{P(4,4)=4!}$

Her branştaki tek kişi sayılırsa; A:1, Ö:1 olup 1+1=2 kişi yuvarlak masa etrafında (n-1)!=(2-1)!=1! farklı şekilde oturur. Genel olarak oturmaları:

$P(3,3)*P(4,4)*(2-1)!=3!*4!*1!$ *şekilde otururlar.*

Kombinasyon:

* Kombinasyon; seçim – seçme işlemleri yapar. Sıralama veya diziliş yoktur, nesneleri seçmiş olmak yeterlidir.

* n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonu (alt kümeleri sayısı) C(n,r):

$$\boxed{C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!*r!}=\frac{P(n,r)}{r!}}$$

* $\boxed{\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\Rightarrow\{a=b \ \ || \ \ a+b=n}$

* $\boxed{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}$

* $\boxed{\binom{n}{1}=n}$

* $\boxed{\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}}$

* n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı $\boxed{2^n}$;

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n}$$

Örnek:

- $C(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!*3!}=\frac{7!}{4!*3!}=\frac{7*6*5*4!}{4!*3!}=7*5=35$
- $C(n,2)=21\Rightarrow\frac{P(n,2)}{2!}=21\Rightarrow n*(n-1)=42\Rightarrow n=7$

Örnek: *8 kişi arasından 6 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilir?*

$\binom{8}{6}=\binom{8}{8-6}=\binom{8}{2}=\frac{P(8,2)}{2!}=\frac{8*7}{2}=28$ *değişik şekilde.*

Örnek: *6 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?*

$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=\binom{6}{3}+\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+1=\frac{6*5*4}{3!}+\frac{6*5}{2!}+6+1$
$=20+15+6+1=42$ *tane en az 3 elemanlı alt küme var.*

Örnek: *15 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç farklı şekilde seçilir?*

Bir başkan sınıftan C(15,1)=15 şekilde seçilir.
Kalan 14 kişi içinde başkan yardımcısı da C(14,1)=14 şekilde seçilir.
*İkisi birlikte = 15 * 14 = 210 farklı şekilde seçilir.*

Örnek: *Bir sınıfta 10 erkek, 12 kız var. Bu sınıftan 1 erkek, 2 kız öğrenciden oluşan üç kişilik bir grup kaç farklı şekilde?*

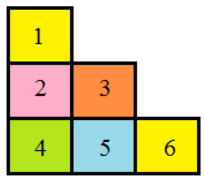
$\binom{10}{1}*\binom{12}{2}=\frac{10}{1!}*\frac{12*11}{2!}=10*66=660$ *değişik şekilde.*

Örnek: *5 pantolon ve 5 gömleği bulunan Ozan'ın, pantolonlarının üçü siyah, ikisi mavi; gömleklerinin ikisi siyah, üçü mavidir. Ozan, farklı renklerde 1 pantolon ve 1 gömleği kaç değişik şekilde giyer?*

5 Pantolon : Siyah: 3, Mavi: 2
5 Gömlek : Siyah: 2, Mavi: 3

Giyinme=[Pantolon (Siyah) * Gömlek (Mavi)] + [Pantolon (Mavi) * Gömlek (Siyah)]
Giyinme= [3 siyah (1 tane) * 3 mavi (1 tane)]+[2 mavi (1 tane) * 2 siyah (1 tane)]
Giyinme= [C (3,1) * C(3,1)] + [C (2,1) * C(2,1)]
Giyinme= 3 * 3 + 2 * 2 = 13 değişik biçimde gerçekleşir.

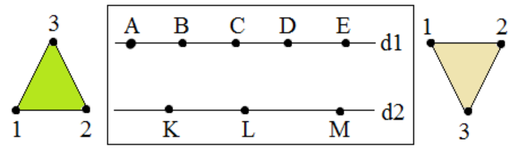
Örnek: *Ayşen elindeki değişik renkteki 8 boya kalemini kullanarak şekilde verilen altı kareyi, 1 ve 6 numaralı kareler aynı renkte, diğer kareler de bu karelerden ve birbirinden farklı renklerde olacak şekilde boyanmak isteniyor. Bu boyama işi kaç farklı şekilde yapılabilir?*



1 ve 6 no'lu kareler aynı renk boyanacağından kutuya 5 farklı renk seçilmelidir. Ayrıca istediği sırada boyayabilir (5 durum içinde):

$C(8,5)*P(5,5)=\frac{P(8,3)}{3!}*5!=\frac{8*7*6}{3!}*5!=6720$ *şekilde*

Örnek: *d1 ve d2 doğruları birbirine paraleldir. Köşeleri şekildeki 8 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen çizilir?*
(A, B, C, D, E ∈ d1; K, L, M ∈ d2)



$\binom{5}{1}*\binom{3}{2}+\binom{5}{2}*\binom{3}{1}=5*3+10*3=45$ *tane*

Veya; eksende 8 nokta, tüm durum – üçgen olmama durum;

$\binom{8}{3}-\left(\binom{5}{3}+\binom{3}{3}\right)=56-(10+1)=45$ *tane*

Örnek: *4 erkek ve 5 kız arasından 3 kişilik bir grup oluşturulacak. Bu gruptan en az birinin erkek olması istenirse bu grup kaç farklı şekilde oluşur?*

(1e+2k) +(2e+1k)+ (3e+0k) = Tüm koşul - (0e+3k)

$\binom{4}{1}*\binom{5}{2}+\binom{4}{2}*\binom{5}{1}+\binom{4}{3}*\binom{5}{0}=40+30+4=74$ *veya*

$\binom{9}{3}-\binom{5}{3}=84-10=74$ *farklı şekilde*